ACTES DE LES IV TROBADES D'HISTÒRIA DE LA CIÈNCIA I DE LA TÈCNICA
(ALCOI-BARCELONA, SCHCT, 1997), 571-578

LA QUADRATURA DEL CERCLE DE PIETRO MENGOLI (1625-1686)

M. Rosa Massa Esteve
Centre d'Estudis d'Història de les Ciències. Universitat Autònoma de Barcelona

Paraules clau: cercle, quadratures, segle XVII, Mengoli.

The circle's quadrature of Pietro Mengoli (1625-1686)

Summary: *This paper aims to analize the method of quadratures developped for Pietro Mengoli (1625-1686), probably the most original pupil of Bonaventura Cavalieri (1598-1647), in the* Geometriae speciosae elementa *(Bolonya, 1659) and in the* Circolo *(Bolonya, 1672). Mengoli uses the Viète's algebra, the numerical theory called «quasi proportions» explained in the* Elementum tertium *of the* Geometriae *and the triangular tables so as to generalize the quadratures.*

Key words: *circle, quadratures, 17th-century, Mengoli.*

1. Introducció

Una de les principals novetats a les matemàtiques del segle XVII és la conjunció de l'àlgebra i la geometria. Els dos grans avenços d'aquest segle, la geometria analítica i el càlcul infinitesimal, obtenen el seu excepcional poder de l'exploració i l'aplicació de les analogies entre fórmules i figures i entre càlculs simbòlics algebraics i construccions geomètriques.

És dins d'aquest marc que, Pietro Mengoli (1625-1686), matemàtic, deixeble de Cavalieri, va fer la quadratura del cercle la qual es troba explicada en la seva obra *Circolo* (Bolonya, 1672). Per desenvolupar-la, Mengoli va utilitzar un nou mètode de quadratures que ja havia explicat en una obra anterior, *Geometriae Speciosae Elementa* (Bolonya, 1659). En aquest article s'exposarà com Mengoli calculava quadratures i com va aplicar el seu mètode a la quadratura del cercle.

2. L'obra de Pietro Mengoli[1]

Mengoli (1625-1686) va ser professor a la Universitat de la seva ciutat natal Bolonya i va succeir en la càtedra el seu mestre, Cavalieri. En aquesta primera època va escriure tres obres de matemàtica pura: *Novae quadraturae arithmeticae seu De Additione Fractionum,* (Bolonya, 1650), *Via regia ad Mathematicas per Arithmeticam, Algebram Speciosam, & Planimetriam,* (Bolonya, 1655) i *Geometriae speciosae elementa*, (Bolonya, 1659). El 1660 va ser ordenat sacerdot i, fins a la seva mort, va ser prior de l'església de Santa Maria Magdalena de Bolonya. Del 1660 al 1670 no va publicar res, però a partir de 1670 va recomençar les publicacions amb la *Refrattioni e parallase solare* (Bolonya, 1670), la *Speculationi di Musica* (Bolonya, 1670) i el *Circolo* (Bolonya, 1672). Aquestes obres són un reflex de la nova idea de Mengoli: no únicament centrar-se en la recerca de matemàtica pura, sinó també en la mixta com ara astronomia, cronologia i música, amb la finalitat d'explicar el món. Així en la mateixa línia publicà *Anno* (Bolonya, 1675) i *Messe* (Bolonya, 1681) sobre cosmologia i cronologia bíblica i *Arithmetica Rationalis* (Bolonya, 1674) i *Arithmetica Realis* (Bolonya, 1675) sobre lògica i metafísica.

3. La quadratura del cercle

Des de l'antiguitat els científics intentaven resoldre geomètricament tres problemes: «la duplicació del cub», «la trisecció de l'angle» i «la quadratura del cercle». Els esforços dels grans pensadors matemàtics al llarg de la història per resoldre aquests problemes van fer avançar considerablement les matemàtiques. No és d'estranyar, doncs, que Mengoli en començar el *Circolo* (Bolonya, 1672) anomeni aquest problema com un dels que l'ha preocupat des de jove:

> Vaig buscar, des de jovenet, el problema de la quadratura del cercle, el més desitjat de tota la Geometria, com ja vaig dir en el prefaci del meu llibre de la *Quadrature Aritmetiche* l'any 1650. El vaig trobar, després d'haver enquadernat el llibre dels *Elementi della Geometria Speciosa,* que vaig imprimir l'any 1659, es a dir l'any següent 1660[2].

Per què Mengoli no va publicar la quadratura del cercle junt amb la *Geometriae* l'any 1659 i ho va fer després l'any 1672? És difícil de saber, encara que Mengoli dóna les seves raons:

[1] Més dades sobre la trajectòria científica de Mengoli a Natucci (1971), 303-304, Baroncini, Cavazza (ed.), 1-22 i Baroncini (1979/80), 23-56.

[2] Potser sigui certa l'afirmació de Mengoli ja que en la introducció de l'Elementum sextum de la Geometriae Speciosae Elementa, Mengoli diu que utilitzarà unes proposicions sobre logaritmes però realment no les fa servir sinó que les utilitza després en el Circolo.

...m'he acostumat a menysprear fins i tot les meves coses Geomètriques i només tenir-les en compte en allò que em serveixin per explicar les coses naturals.
És per això que mentre estic escrivint les regles dels Solsticis i dels Equinoccis, que he trobat i comunicat per escrit a alguns; havent concebut l'esperança de reduir, mitjançant aquest problema de la Quadratura del Cercle, la Teoria del Sol, a només tants principis com es llegeixen en el primer capítol del Gènesi, i potser encara tot el sistema: he cregut convenient treure de les tenebres el meu raonament i comunicar-lo.

Continua Mengoli dient que, per fer la quadratura del cercle s'ha servit també dels càlculs ja fets per Lodolfo a Ceulen (1540-1610) i James Gregory (1638-1675)[3]. Però, Mengoli explica que els seus càlculs són més fàcils perquè exclouen les extraccions de les arrels i són practicables per logaritmes, ja que no procedeixen per addició i subtracció sinó, únicament, per multiplicació i divisió.

I comença el seu raonament recordant les quadratures que ha calculat en l'*Elementum sextum* de la *Geometriae.* Mengoli, per fer quadratures, no utilitza, com seria d'esperar, el mateix mètode dels indivisibles del seu mestre Cavalieri[4]. Mengoli en la carta dedicada a Dominico Cassino, en l'*Elementum sextum* de la *Geometriae*, demostra aquestes innombrables quadratures tot utilitzant el mètode de Cavalieri i diu que feia onze anys (1648) que les havia trobat, però justifica no haver-les donat a conèixer fins aleshores, no perquè cregués que el mètode no era correcte, sinó perquè intenta cercar un nou mètode amb fonaments més sòlids. L'estudi de l'obra de Mengoli revela que la base del seu nou mètode va ser la teoria de «quasi proporcions», una teoria numèrica de sumes de potències i producte de potències que no tenen res a veure amb les *Omnes lineae* de Cavalieri[5]. O sigui Mengoli calcula les àrees, entre 0 i 1, de totes les figures determinades per expressions:

$$(m+1)\binom{m}{n}x^{n}(1-x)^{(m-n)}$$

[3] Ceulen va escriure Van den Circkel (1596) on relaciona la mida de la circumferència amb el diàmetre, fent polígons inscrits i circumscrits i aconsegueix pi amb 35 decimals. Vegeu Bosmans (1910), 88-139. Gregory va fer Vera Circuli et hyperbolae quadratura (1667) on calcula àrees fent la doble seqüència d'incrits i circumscrits i veient que convergeixen al límit que és l'àrea. Veure Scriba (1983), 274-285 i Gregory (1939), 465-478.

[4] Recordem que Cavalieri havia exposat el seu mètode dels indivisibles a Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota (Bolonya, 1635) i Exercitationes geometricae sex (Bolonya, 1647). Pel que fa a estudis sobre aquest mètode cal remarcar Andersen (1984/85), Giusti (1980) i en català Massa (1994).

[5] Mengoli volía fer quadratures com altres matemàtics de l'època, Fermat(1601-1665), Roberval (1602-1675), Wallis (1616-1703) i Pascal (1623-1662). Un dels objectius d'aquests matemàtics era calcular el límit:

$$\text{lím}\left[\frac{1^{p}+\dots\dots\dots+t^{p}}{t^{p+1}}\right]=\frac{1}{p+1}$$

quan t tendeix a infinit ja que aquest límit els permetia quadrar les paràboles

$$y=x^{p}$$

sent p qualsevol enter positiu. Mengoli també el va calcular amb la teoria de quasi proporcions de l'Elementum tertium de la Geometriae. Una anàlisi exhaustiva d'aquesta teoria es troba a Massa (1993), (1995) i (1997).

amb m i n naturals fent quasi proporcions, com ara explicarem, però Mengoli coneixia d'antuvi el resultat.

Mengoli primer descriu les figures associades a aquestes expressions i les ordena en taules triangulars[6].

Tabula subquadraturarum

$$\begin{array}{ccccccc} & & & FO\,u & & & \\ & & FOa & & FOr & & \\ & FOa^2 & & FO2ar & & FOr^2 & \\ FOa^3 & & FO4a^2r & & FO4ar^2 & & FOr^3 \end{array}$$

Tabula quadraturarum

$$\begin{array}{ccccccc} & & & FO\,u & & & \\ & & FO2a & & FO2r & & \\ & FO3a^2 & & FO6ar & & FO3r^2 & \\ FO4a^3 & & FO12a^2r & & FO12ar^2 & & FO4r^3 \end{array}$$

En les taules la figura del vèrtex, *FOu,* representa un quadrat de base 1, les dues figures de la primera fila representen dos triangles, el primer *FOa*, determinat per la bisectriu del primer quadrant $y=x$, l'eix d'abscisses i la recta $x = 1$. El segon triangle *FOr*, determinat per la recta $y = 1-x$ traçada des de l'extrem (1,0), l'eix d'abscisses i l'eix d'ordenades. Les tres figures de la segona fila representen arcs de paràbola dins del quadrat de costat 1, la primera *FOa*2 determinada per la corba $y = x^2$, la segona *FO2ar* determinada per la corba $y = 2x(1-x)$, la tercera FOr^2 determinada per la corba $y = (1-x)^2$, etc. Aquestes figures les descriu «per les seves ordenades esteses», les anomena formes i les escriu *FO*[7]. La primera taula l'anomena *Tabula formosa*, taula de les formes, i en ella només hi apareixen les formes sense coeficients. La segona, *Tabula subquadraturarum,* és la composició de l'anterior, taula de les formes, i la taula dels nombres combinatoris i la tercera, *Tabula quadraturarum* l'obté de la taula anterior multiplicant cada una de les files per un nombre, una unitat més gran de l'ordre que representen, així, la primera fila la multiplica per 2, la segona per 3, etc. O sigui que, els coeficients de la *Tabula quadraturarum* són:

$$(m+1)\binom{m}{n}$$

sent m l'ordre de la fila que, a la vegada, coincideix amb el grau de l'expressió algebraica.

Veiem com troba en l'*Elementum sextum* les àrees associades a aquestes formes[8].

[6] Les taules triangulars són una eina molt utilitzada per Mengoli dins la Geometriae. En l'Elementum primum els elements de la taula eren nombres, representats per lletres, que multiplicant-los pels nombres combinatoris li permetien calcular indefinidament tots els sumands d'un binomi elevat a qualsevol potència natural. En l'Elementum secundum els elements de la taula eren sumatoris de potències i de productes de potències que va calcular, també indefinidament.

[7] En l'Elementum sextum Mengoli estudia les característiques d'aquestes figures pel que fa a monotonia i punts singulars. Demostra que les formes FO a^n, determinades per corbes $y = x^n$, són creixents i que la màxima ordenada es troba a l'extrem de la base i val el mateix que la base. Seguidament demostra que les formes FO r^n, determinades per corbes $y = (1-x)^n$, són decreixents i que la màxima ordenada es troba a l'origen de la base i també val el mateix que la base. En el Teorema 2 demostra que les formes FO $a^n r^m$, determinades per corbes $y = x^n (1-x)^m$, són primer creixents i després decreixents, sent el seu màxim un valor que està situat en raó n és a m.

[8] Alguns teoremes es troben traduïts a l'italià a Agostini (1925), (1950).

Abans de calcular-les, Mengoli es preocupa de veure a quina figura s'apropen aquestes formes quan les divisions de la base es fan infinites. O sigui, fa una quasi raó per demostrar l'existència d'aquestes formes, tot recorrent al mètode d'exhaustió d'Arquimedes. Defineix tres figures associades a les formes: la inscrita, composta pels paral·lelograms màxims inclosos en la forma; la circumscrita, composta pels paral·lelograms mínims que inclouen la forma i l'adscrita, composta de tots els paral·lelograms, que estan construïts sobre l'ordenada corresponent del primer extrem de cada divisió o bé, sobre l'últim extrem en cada divisió. Aleshores Mengoli demostra que la circumscrita i la inscrita són quasi iguals (Teorema 6) i com que l'adscrita i la forma, figura descrita per les ordenades, són més petites que la circumscrita i més grans que la inscrita (Teorema 5), llavors l'adscrita i la forma també són quasi iguals (Teorema 7). Per fer la demostració utilitza les definicions de l'*Elementum tertium* de quasi la unitat i quasi iguals. Aquest resultat li permet dir que les seves àrees associades també són quasi iguals. Tot seguit, demostra, fent una quasi raó, que totes les àrees de les formes de la *Tabula quadraturarum* valen igual i igual que l'àrea del quadrat de base 1, o sigui la unitat. Per fer-ho estableix una proporció on el primer membre és la raó entre l'adscrita a una d'aquestes formes i la forma del quadrat de base 1 i el segon membre és la raó del sumatori finit de les ordenades:

$$(m+1)\binom{m}{n}\sum_{x=1}^{x=t-1} x^n\,[t-x]^{(m-n)} = 1$$

i el nombre de divisions t(p+1).Després, aplica el terme quasi a la proporció, o sigui, fa infinites les divisions de la base i com que el segon membre és quasi la igualtat, pel Teorema 42 de l'*Elementum tertium*, troba que, l'àrea d'una d'aquestes formes i l'àrea del quadrat són iguals. Això vol dir que, el valor de l'àrea d'aquestes formes entre 0 i 1 seria 1, en notació actual:

$$\int (m+1)\binom{m}{n} x^n\,[1-x]^{(m-n)} = 1$$

o bé aïllant:

$$\int x^n\,(1-x)^{(m-n)} = \frac{1}{(m+1)\binom{m}{n}}$$

En el *Circolo* escriu primer la taula del valor de les quadratures i, després, la taula de les formes, sense coeficients, associades a aquestes àrees:

				1				
			1/2		1/2			
		1/3		1/6		1/3		
	1/4		1/12		1/12		1/4	
1/5		1/20		1/30		1/20		1/5

				FOu				
			FOa		*FOr*			
		FOa^2		*FOar*		FOr^2		
	*FOa*3		*FOa*2*r*		$FOar^2$		FOr^3	
FOa^4		FOa^3r		FOa^2r^2		$FOar^3$		FOr^4

Seguidament, parla de les figures que obtindrà tot interpolant-les, així, construeix una nova taula de formes dins del quadrat de costat 1. En el vèrtex segueix representant-hi un quadrat, a la primera fila, $FOa^{1/2}$ i $FOr^{1/2}$, formes determinades per les corbes $y = x^{1/2}$ i $y = (1\text{-}x)^{1/2}$ respectivament, a la segona fila, FOa, $FO(ar)^{1/2}$ i FOr, formes determinades per les corbes $y = x$, $y = (x.(1\text{-}x))^{1/2}$ que és el semicercle i $y = 1\text{-}x$ respectivament, a la tercera fila, $FOa^{3/2}$, $FO(a^2r)^{1/2}$, $FO(ar^2)^{1/2}$ i $FOr^{3/2}$, formes determinades per les corbes $y = x^{3/2}$, $y = (x^2(1\text{-}x))^{1/2}$, $y = (x(1\text{-}x)^2)^{1/2}$ i $y = (1\text{-}x)^{3/2}$ respectivament, a la quarta fila, FOa^2, $FO(a^3r)^{1/2}$, $FOar$, $FO(ar^3)^{1/2}$ i FOr^2, formes determinades per les corbes $y = x^2$, $y = (x^3(1\text{-}x))^{1/2}$, $y = x(1\text{-}x)$, $y = (x(1\text{-}x)^3)^{1/2}$ i $y = (1\text{-}x)^2$ respectivament,... Llavors, interpolant els valors de les àrees, utilitzant les propietats dels nombres poligonals i les del triangle aritmètic, construeix la taula dels valors de les àrees associades a aquestes formes interpolades.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 2/3 & & 2/3 & & & \\
 & & 1/2 & & 1/2a & & 1/2 & & \\
 & 2/5 & & 4/15 & & 4/15 & & 2/5 & \\
1/3 & & 1/4a & & 1/6 & & 1/4a & & 1/3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & FOu & & & & \\
 & & & FOa^{1/2} & & FOr^{1/2} & & & \\
 & & FOa & & FO(ar)^{1/2} & & FOr & & \\
 & FOa^{3/2} & & FO(a^2r)^{1/2} & & FO(ar^2)^{1/2} & & FOr^{3/2} & \\
FOa^2 & & FO(a^3r)^{1/2} & & FOar & & FO(ar^3)^{1/2} & & FOr^2
\end{array}
$$

En notació actual, l'àrea d'aquestes formes entre 0 i 1 seria:

$$\int\sqrt{x^n(1-x)^{(m-n)}} = \frac{1}{\frac{m+1}{2}\binom{m/2}{n/2}}$$

Mengoli explica que aquest és un teorema que conté innombrables teoremes de quadratures ja que són innombrables els termes de les taules triangulars i poden creixer infinitament. Els distingeix en tres classes, cadascuna d'innombrables teoremes. La primera classe és dels teoremes que ja hem demostrat en l'*Elementum sextum* o sigui que no hi ha arrel quadrada ja que n i $m\text{-}n$ són parells. La segona classe és dels teoremes on, o bé n és un nombre parell, o bé $m\text{-}n$ és parell, així dedueix que l'àrea entre 0 i 1 de la forma determinada per la corba $y = x^{3/2}$ és 2/5, la determinada per la corba $y = x^{1/2}$ és 2/3, la determinada per la corba $y = (x^2\cdot(1\text{-}x))^{1/2}$ és 4/15,....La tercera classe és d'aquells innombrables teoremes, on n i $m\text{-}n$ són senars, en els quals apareixen nombres especiosos o sigui el semicercle, forma determinada per $y = (x.(1\text{-}x))^{1/2}$ que la seva àrea és $1/2a$, la forma determinada per la corba $y = (x^3\cdot(1\text{-}x))^{1/2}$ que té una àrea proporcional a $1/4a$,..Tot seguit, Mengoli calcula el valor del nombre a, que és 4/pi, acotant-lo amb productes infinits. Aplica logaritmes per transformar aquests productes en sèries infinites i arriba a trobar el valor de «pi» amb onze decimals[9]. A manera d'epíleg, podríem destacar algunes de les característiques de l'obra matemàtica de Mengoli: la utilització de l'àlgebra de Viète i la seva gran eina de càlcul: el triangle aritmètic. A diferència dels matemàtics de l'època, Mengoli utilitza lletres, sumatoris expressats amb lletres i les taules triangulars per tal de generalitzar. No posa exemples numèrics, demostra totes les proposicions i no ho comprova fent cada figura geomètrica sinó que intenta donar propietats que englobin moltes figures. Tot i calcular innombrables quadratures no trobem en el *Circolo* ni un sol dibuix, ni una sola figura. La seva originalitat rau en l'aplicació de l'àlgebra a la geometria

[9] Aquestes demostracions i càlculs requeririen un nou article.

per mitjà de les taules triangulars; la qual cosa li permet trobar, alhora, innombrables àrees de figures planes ja que la taula de les quadratures de l'*Elementum sextum* i la del *Circolo* es poden estendre tant com vulguem. A més, Mengoli dóna unes regles per construir noves taules amb arrels cúbiques, quartes.., d'on es pot deduir que, Mengoli sap que l'àrea d'aquestes formes entre 0 i 1 seria en notació actual:

$$\int\left(x^{n}(1-x)^{(m-n)}\right)^{1/p}=\frac{1}{\frac{m+1}{p}\binom{m/p}{n/p}}$$

Bibliografia

AGOSTINI, A. (1925), «Il concetto d'integrale definito in Pietro Mengoli», *Periodico di Matematiche,* ser 4, vol. 5, 137-146.

AGOSTINI, A. (1950), «L'opera matematica di Pietro Mengoli», *Archive Internationale d'-Histoire des Sciences, 3*, 816-834.

ANDERSEN, K. (1984/85), «Cavalieri's Method of Indivisibles», *Archive for the History of the Exact Sciences* (en endavant, *AHES*), *31*, 291-367.

BARONCINI, G. (1979/80), «Un itinerario galileiano: Pietro Mengoli dalla meccanica alla teologia matematica», *Atti della Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna. Cl. di Scienze Morale. Memoria, 77*, 23-56.

BARONCINI G.; CAVAZZA M. (eds.) (1986), *La corrispondenza di Pietro Mengoli,* Florence: Olschki.

BOSMANS, H. (1910), «Un émule de Viète» in *Annales de la Sociéte Scientifique de Bruxelles, 34*, 2, 88-139, with an analysis of Van den Cirkel (1596, Van Ceulen).

CAVALIERI, B. (1635), *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota,* Bologna.

CAVALIERI, B. (1647), *Exercitationes geometricae sex*, Bologna.

GIUSTI, E. (1980), *Bonaventura Cavalieri and the Theory of Indivisibles,* Bolonya, Edizioni Cremonese.

GREGORY, J. (1939), En: TURBULL (ed.): *Tercentenary Memorial Volume,* London, Bell, 465-478.

MASSA, M. R. (1993), *Contribució de Pietro Mengoli al concepte de límit a través d'una teoria de les quasi proporcions.* Treball de Mestratge en Història de les Ciències, Barcelona, Centre d'estudis d'Història de les Ciències, Universitat Autònoma de Barcelona.

MASSA, M. R. (1994), «El mètode dels indivisibles de Bonaventura Cavalieri», *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques, 9,* 68-100.

MASSA, M. R. (1995), «Les quasi proporcions de Pietro Mengoli i el concepte de límit en el segle XVII». En PUIG-PLA, C. et al. (coord.): *Actes de les III Trobades d'Història de la Ciència i de la Tècnica (Tarragona, 7-9 desembre 1994),* Barcelona, Societat Catalana d'-Història de la Ciència i de la Tècnica, 232-240.

MASSA, M. R. (1997), «Mengoli on «Quasi Proportions»», *Historia Mathematica, 24,* 2.

MENGOLI, P. (1659), *Geometriae speciosae elementa,* Bolonya.
MENGOLI, P. (1672), *Circolo,* Bolonya.
NATUCCI, A. (1971), «Mengoli», *Dictionary of Scientific Biography* (ed. C. C. Gillispie), New York, Scribner's, 16 Vols,
SCRIBA, CHRISTOPH J. (1983), «Gregory's converging double sequence. A New Look at the Controversy between Huygens and Gregory over the «Analytical» Quadrature of the Circle», *Historia Mathematica, 10*, 274-285.